

Roll No. :

MATS5612

**B.A./B.Sc., Semester-Fifth,
Examination-2023-2024**

MATHEMATICS

PAPER - Second

**(Functions of Several Variables and
Partial Differential Equations)**

[Time : 3 Hrs.]

[Maximum Marks : B.A. : 55
B.Sc. : 75]

Note : This question paper contains two sections. Section A contains Eight short answer type questions. Attempt any 05 questions from this section. Each question Carries 5/6 marks. Section B contains five long answer type questions. Attempt any 03 question from this sections. Each questions carries 10/15 marks.

इस प्रश्नपत्र में दो खण्ड हैं। खंड-अ में आठ लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं जिसमें से किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/6 अंकों का है। खंड-ब में पाँच दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं जिसमें से किन्हीं 03 प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10/15 अंकों का है।

SECTION - A / खण्ड - अ
(Short Answer Type Questions)
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(5/6 Each)

Note : Attempt any 05 questions out of 08 given.

दिये गये 08 प्रश्नों में से किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

1. Show that the function $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ and $f(x, y) = 0$, $(x, y) = (0, 0)$ is continuous at the origin.

दर्शाइये कि फलन $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ और $f(x, y) = 0$, $(x, y) = (0, 0)$ मूल बिन्दु पर सतत है।

2. If $u = \sin^{-1} \left\{ \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)} \right\}$,

Show that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$.

यदि $u = \sin^{-1} \left\{ \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)} \right\}$

दर्शाइये कि $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$.

3. If $Z = (x^2 + y^2)/(x + y)$, then show that

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

यदि $Z = (x^2 + y^2)/(x + y)$, तब दिखाइए कि

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

4. Discuss the maximum or minimum values of u , where $u = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z - xy$.

u के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि $u = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z - xy$

5. Expand x^y in powers of $(x-1)$ and $(y-1)$ upto the third degree terms.

x^y को $(x-1)$ एवं $(y-1)$ की घातों के रूप में त्रिघातीय तक विस्तारित कीजिए।

6. Solve the Charpit's method $z^2 = pqxy$.

चार्पिट विधि से हल कीजिए $z^2 = pqxy$.

7. Solve $(D^2 - 5DD' + 4D'^2)z = \sin(4x + y)$.

हल कीजिए $(D^2 - 5DD' + 4D'^2)z = \sin(4x + y)$.

8. Classify the following partial differential equations.

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 17 \frac{\partial u}{\partial t} = 100u$.

निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों को वर्गीकृत कीजिए

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 17 \frac{\partial u}{\partial t} = 100u$.

SECTION - B / खण्ड - ब
(Long Answer Type Questions)
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(10/15 each)

Note : Attempt any 03 questions out of 05 given.

दिये गये 05 प्रश्नों में से किन्हीं 03 प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

9. Given that

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \text{ if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i) Find from the definition $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ and $f_{xy}(0,0)$

(ii) Prove that $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

दिया है $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(i) परिभाषा से ज्ञात कीजिए $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ एवं $f_{xy}(0,0)$

(ii) सिद्ध कीजिए कि $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

10. State Euler's theorem and verify Euler's theorem for the function $u = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$.

ऑयलर प्रमेय का कथन लिखिए एवं फलन $u = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ के लिए ऑयलर प्रमेय प्रमाणित कीजिए।

11. If $u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$, $u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$, $u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$

यदि $u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$, $u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$,

$u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$

12. Find complete integral for $px + qy = z\sqrt{(1+pq)}$
पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए $px + qy = z\sqrt{(1+pq)}$

13. Solve $r - t = \tan^2 x \tan y - \tan x \tan^3 y$.

हल कीजिए $r - t = \tan^2 x \tan y - \tan x \tan^3 y$.