

Roll No. .

MATS4612

**B.A./B.Sc., Semester-Fourth
Examination-2022-2023**

**MATHEMATICS
PAPER - Second
(Ring Theory)**

[Time : 3 Hrs.]

[Maximum Marks : 55/75]

Note : This question paper contains two sections. Section A contains Eight short answer type question. Each question carries 5/6 marks. Section B contains five long answer type questions. Attempt any three questions from this section. Each questions carries 10/15 marks.

इस प्रश्नपत्र में दो खंड हैं, खण्ड-अ में आठ लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। जिनमें से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/6 अंकों का है। खण्ड-ब में पाँच दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। जिनमें से किन्हीं 3 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10/15 अंकों का है।

**SECTION - A / खण्ड - अ
(Short Answer Type Questions)
(लघु उत्तरीय प्रश्न)**

(5 / 6 marks each)

Note : Attempt any five questions

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. Define Ring and show that the set of all even integers is a commutative ring without unit element.

रिंग को परिभाषित करें और दिखाएँ कि सभी सम पूर्णाकों का सेट इकाई तत्व के बिना एक क्रम विनिमेय रिंग है।

2. Define subring of a ring and prove that a nonempty subset S of a ring R is a subring of R iff (i) $a - b \in S$ and (ii) $ab \in S, \forall a, b \in S$

एक रिंग के सबरिंग को परिभाषित करें और साबित करें कि रिंग R का एक गैर रिक्त उपसमूह S, R का एक सबरिंग है यदि और केवल यदि (i) $a - b \in S$ और (ii) $ab \in S, \forall a, b \in S$

3. Prove that every ideal of a ring R is a subring of R but the converse need not be true.

सिद्ध करें कि वलय R का प्रत्येक आदर्श R का एक उपवलय है, लेकिन इसका विपरीत मूल्य होना आवश्यक नहीं है।

4. Define field and prove that a finite division ring is a field.

क्षेत्र को परिभाषित करें और सिद्ध करें कि यदि एक परिमित विभाजन वलय एक क्षेत्र है।

5. Define quotient ring. Show that the Set $A = \{5x : x \in \mathbb{Z}\}$ is an ideal of \mathbb{Z} , determine the quotient ring \mathbb{Z}/A .

भागफल वलय को परिभाषित करें। दिखाएँ कि समुच्चय $A = \{5x : x \in \mathbb{Z}\}$ का एक आदर्श है, भागफल वलय \mathbb{Z}/A निर्धारित करें।

6. Define Maximal and prime ideals of a ring. Find the maximal ideals of \mathbb{Z}_8 , the ring of integers modulo 8.

एक वलय के अधिकतम और अभाज्य आदर्शों को परिभाषित करें। \mathbb{Z}_8 का अधिकतमक आदर्श ज्ञात करें, पूर्णांक मापांक 8 का वलय।

7. Find the sum and product of the polynomials $f(x) = 1 + 3x$, $g(x) = 4 + 5x + 2x^2$ in $\mathbb{Z}_6[x]$.

$\mathbb{Z}_6[x]$ में बहुपद $f(x) = 1 + 3x$, $g(x) = 4 + 5x + 2x^2$ का योग और उत्पाद ज्ञात करें।

8. Define Principal ideal domain and show that the set of all integers \mathbb{Z} is a Principal ideal domain.

प्रिंसिपल आदर्श डोमेन को परिभाषित करें और दिखाएं कि सभी पूर्णांक \mathbb{Z} का सेट एक प्रिंसिपल आदर्श डोमेन है।

SECTION - B / खण्ड - ब
(Long Answer Type Questions)
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(10 / 15 marks each)

Note : Attempt any three questions.

किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

9. If $(R, +, \cdot)$ is a ring, then prove that यदि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है, जो सिद्ध कीजिए

(i) If $a + b = a + c$ then $b = c$

(ii) $a \cdot (b - c) = ab - ac$

(iii) $(-1)(-1) = 1$

10. Let R be a commutative ring. Then prove that R is an integral domain if and only if cancellation laws with respect to multiplication holds. Also show that cancellation law may not hold in an arbitrary ring.

माना R एक क्रमविनिमेय वलय है। फिर सिद्ध करें कि R एक अभिन्न डोमेन है यदि और केवल यदि गुणन के संबंध में रद्दीकरण कानून लागू होता है। यह भी दिखाएं कि रद्दीकरण कानून मनमाने वलय पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

11. Define left and right ideals of a ring. Show that the $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ is a right ideal of M_2 , the ring of 2×2 matrices over integers, which is not a left ideal of M_2 .

रिंग के बाएँ और दाएँ आदर्शों को परिभाषित करें, दिखाएँ कि सेट $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ M_2 का दायाँ आदर्श है, पूर्णाकों पर 2×2 आव्यूहों का वलय और M_2 का बायाँ आदर्श नहीं है।

12. If R is a commutative ring with unity, then prove that an ideal M of R is maximal if and only if R/M is a field.

यदि R इकाई के साथ एक क्रमविनिमेय वलय है, तो साबित करें कि R का एक आदर्श M अधिकतम है यदि R/M एक क्षेत्र है।

13. Write short notes on the following

- (i) Types of ring
- (ii) Skew field
- (iii) Polynomial rings

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखें।

- (i) वलय के प्रकार
- (ii) तिरछा क्षेत्र
- (iii) बहुपद वलय

<https://www.ssjuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से